모순에 관한 튜링/비트겐슈타인 논쟁

이 승 종 (연세대 강사)

1. 들어가는 말

수학의 기초에 관한 비트겐슈타인의 저술들(RFM, LFM)[1]은 일부의 수학자들로부터 격렬한 비난을 받아 왔다.[2] 그 이유의 하나는 그의 저술이 수학자들의 고유의 영역을 침해하는 것으로 여겨졌다는 점이다. 비트겐슈타인의 비판자들은 모순에 관한 그의 견해를 그 대표적인 예로 들고 있다. 비트겐슈타인 자신도 이러한 비판을 예상하고 있었다. 그는 1939년에 행한 수학 기초론 강의 벽두에서 이 문제를 거론하고 있다.

> 나는 수학의 기초에 관해서 말하려 한다. 이 주제 자체에서 다음과 같은 중요한 문제가 제기된다: 나, 혹은 수학자가 아닌 다른 모든 사람이 어떻게 이러한 주제에 관해서 말할 수 있는가? 과연 철학자가 수학에 관해서 말할 자격이 있는가? … 수학자들을 간섭하지 않는 것이 가장 중요한 일일 것이다.(LFM, p.13)

---

1) 비트겐슈타인의 작품들은 다음과 같이 약호로 표기한다.

NB: *Notebooks 1914-1916.*
TLP: *Tractatus Logico-Philosophicus.*
WVC: *Wittgenstein and the Vienna Circle.*
L: "Wittgenstein's Lectures in 1930-33."
PG: *Philosophical Grammars.*
RFM: *Remarks on the Foundations of Mathematics.*
LFM: *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics.*
PI: *Philosophical Investigations.*
Z: *Zettel.*
MS: *Unpublished Manuscripts.*

2) 가령 Anderson 1958, Bernays 1960, Kreisel 1958을 참조할 것.

이처럼 불간섭을 강조하면서도 수학을 철학의 주제로 다루려 하는 이유는 무엇인가? 비트겐슈타인은 철학자가 수학에 관해 할 수 있는 일이 수학적 언어의 명료화와 해석이라고 본다. 그는 다음과 같이 말한다.

> 철학자인 내가 수학에 관해서 말할 수 있는 이유는 내가 '증명,' '수,' '연속,' '순서' 등과 같은 일상 언어로부터 생겨나는 난제들만을 다룰 것이기 때문이다. (LFM, p.14)

모순에 관한 비트겐슈타인의 견해 역시 영역의 침해가 아니라 개념의 명료화 작업으로 보아야 할 것이다.

본고에서 우리는 수학에 있어서의 모순에 관한 비트겐슈타인의 견해를 검토할 것이다. 그리고 이에 관한 튜링(Turing)과 비트겐슈타인 사이의 논쟁을 비판적으로 분석할 것이다. 다음으로 우리는 논리학에 있어서의 모순에 관한 비트겐슈타인의 견해를 논의하고 그의 모순론이 논리학과 언어의 본성에 대한 그의 생각의 변화와 밀접히 연관되어 있음을 살펴볼 것이다. 이를 바탕으로 우리는 비트겐슈타인의 모순론에 대한 종래의 비판이 타당했는지의 여부를 재평가해 보고자 한다.

2. 수학과 모순

트락타투스(*Tractatus*) 이후로 비트겐슈타인은 수학을 게임에 비유하게 된다. 그가 게임의 비유를 처음 거론한 것은 1930년 6월, 형식주의 수학에 관한 슐릭(Schlick)과의 토론에서였다. 비트겐슈타인은 토론 중 다음과 같이 말하고 있다.

> 형식주의의 어떤 부분은 옳고, 어떤 부분은 옳지 않다.
>
> 모든 구문(syntax)을 게임의 규칙으로 볼 수 있다는 형식주의의 견해는 옳다. 나는 형식주의자가 수학의 공리를 체스의 규칙과 같은 것으로 본다는 와일(Weyl)의 말의 의미에 관해서 생각해 보았다. 나는 수학의 공리뿐 아니라 모든 구문이 다 자

의적이라고 말하고 싶다. (WVC, p.103)

비트겐슈타인은 체스 말이 우리가 체스를 하는 과정에서만 의미를 갖는 것처럼 수학의 기호도 우리가 수학을 하는 과정에서만 의미를 갖는다고 본다. 체스에서 말의 역할이 체스의 규칙에 의해 결정되는 것처럼 수학에서 기호의 역할은 수학의 규칙에 의해 결정된다는 것이다.

비트겐슈타인은 게임의 비유가 수학에 있어서 규칙의 따름이 갖는 중요성을 환기시켜 주는 유용한 도구라고 생각하였다. 그러나 그는 한편으로 이 비유의 남용을 경계하였다. 비트겐슈타인은 형식주의자들이 바로 비유를 남용하고 있는 장본인이라고 보았다. 그들에 의하면 수학은 바로 기호의 게임 그 자체이다. 수학의 본질은 무의미한 기호들의 기계적 운용이며 이는 인간의 행위와 무관하다는 것이다. 가령 형식주의의 대표격인 본 노이만(von Neumann)과 힐버트(Hilbert)는 다음과 같이 말하고 있다.

> 우리는 고전 수학을 원초적 기호들의 게임으로 보아야 한다. (von Neumann 1931, p.51)

> 이 이론에 의하면 수학의 주제는 구체적 기호 자체이다. 그리고 기호의 구조는 즉각적으로 명료하게 알아볼 수 있다. (Hilbert 1925, p.142)

비트겐슈타인은 형식주의를 여러 각도에서 비판한다. 첫째, 우리는 수학을 단지 게임으로만 볼 수 없다(PG, p.293). 만일 수학이 한낱 게임에 불과하다면 수학이 어떻게 그토록 중요한 위치를 차지할 수 있단 말인가? 수학을 보통 사람이 즐기는 게임의 목록에 포함시키는 사람은 아마 없을 것이다. 게임과 수학 사이에는 너무도 많은 차이점이 있다. 가령 수학에서와는 달리 게임에서는 참과 거짓이 문제되지 않는 반면 수학에서는 게임에서와는 달리 승패가 문제되지 않는다(PG, p.293).

둘째, 체스가 나무 말에 관한 게임이 아닌 것처럼 수학의 주제는 구체적 기호가 아니다(WVC, p.105). 가령 '0'이라는 기호 자체가

'1'을 보탰을 때 '1'이라는 기호를 산출하는 속성을 가지는 것은 아니다. 나무 말이 체스의 규칙 하에서만 체스 말로 간주되는 것처럼 기호 '0'은 산술의 규칙 하에서만 수로 정의된다. 이에 연관지어 비트겐슈타인은 게임의 비유를 바탕으로 한 프레게(Frege)의 견해를 논의한다. 그는 프레게의 견해를 다음과 같이 요약하고 있다.

> (프레게에 따르면 수학은) 종이에 쓰여진 잉크의 획을 다루는 학문이거나 혹은 이 잉크 획은 어떤 것의 기호이며 그 의미는 그 획이 지칭하는 것이다. (WVC, p.105)

비트겐슈타인은 이러한 이분법이 근거 없는 것이라고 비판한다. 체스가 나무 말에 관한 게임이 아닌 것처럼 수학의 주제도 종이에 쓰여진 잉크의 획이 아니다. 또한 체스의 말이 어떤 것을 지칭하지 않는 것처럼 수학의 기호도 어떤 것을 지칭한다고 볼 수 없다. 수학이 "실제로 무엇에 **관한** 학문이 아니"(PG, p.290)므로 수학의 기호는 무엇을 지칭하는 기능을 갖지 않는다. 수학의 기호는 기호 게임에 있어서 다른 모든 기호들과 마찬가지로 하나의 놀이 말에 불과하며 그 자체가 무엇을 의미하는 것이 아니다. 수학의 기호는 그것이 규칙에 따라 운용될 때에야 비로소 어떤 역할을 부여받게 된다. 아울러 체스의 규칙이 체스 말의 운용에 관한 올바른 방법과 그릇된 방법을 구별해 주는 규범인 것처럼 수학적 명제는 수학에 있어서 올바른 추론과 그릇된 추론을 구별해 주는 규범이다(RFM, pp.425, 431).

프레게의 수학관에 대한 비트겐슈타인의 비판의 요지는 결국 수학이 종이에 쓰여진 잉크의 획을 다루는 학문도 아니요, 이러한 잉크 획의 의미가 그 획이 지칭하는 것에 의해 밝혀지지도 않는다는 것이다. 비트겐슈타인에 의하면 게임의 비유가 제 3의 대안을 제시한다. 즉 우리가 체스 게임을 하는 과정에서 체스 말이 어떤 역할을 부여받을 수 있는 것처럼 우리가 수학을 하는 과정에서 수학의 기호들은 어떤 역할을 부여받을 수 있게 된다는 것이다.

비트겐슈타인은 위의 논의를 바탕으로 수학이 단지 기호의 게임이라는 형식주의 수학자들의 주장에 대해 세 번째 비판을 전개한다. 형식주의자들은 수학을 기호와 규칙의 형식 체계로 정의한다. 그들

은 게임의 비유를 규칙의 기계적 성격을 부각하는데 사용한다. 그러나 비트겐슈타인은 이들이 게임의 비유를 잘못 사용하고 있다고 본다. 그는 체스 게임을 하는 것과 수학을 하는 것이 모두 인간의 행위라는 점이 게임의 비유의 핵심이라고 주장한다.

> 나는 다음과 같이 말하고 싶다: 수학의 기호가 일상생활에서도 쓰인다는 점은 수학에 있어서 매우 중요한 사실이다.
> 수학의 영역 밖에서 기호의 쓰임과 그 의미로 말미암아 기호의 게임은 수학이 된다. (RFM, p.257)

비트겐슈타인은 수학이 일상생활에도 적용된다는 사실이 수학의 본질과 무관하지 않다고 본다. 구체적 쓰임의 문맥을 벗어나서 수학의 기호는 아무런 의미를 갖지 않는다는 것이다.

형식주의에 대한 비트겐슈타인의 네 번째 비판은 수학에 있어서의 모순과 메타 수학의 무모순성 증명에 초점을 두고 있다. 바로 이 네 번째 비판이 형식주의에 대한 그의 비판 중 가장 강도 높은 비판이자 또한 가장 많은 논란을 불러일으킨 비판이기도 하다. 비트겐슈타인이 문제삼는 형식주의자들의 견해는 다음과 같다(Cf. Wright 1980, pp.296-297).

> (가) 모순된 체계는 본질적으로 결함이 있는 체계이다. 그 체계는 모순으로 말미암아 완전히 못쓰게 된다. 모순은 체계를 병들게 하는 주 요인이다.
> (나) 수학의 어느 분야, 어느 체계에서이건 모순이 기계적으로 제거되거나 회피될 수 있는 것이 바람직하다.
> (다) 무모순성의 증명이 이루어지지 않은 체계는 궁극적으로 불안정한 체계이다.

이에 대한 비트겐슈타인의 비판을 살펴보기에 앞서 우리는 두 가지 점에 유의할 필요가 있다. 첫째, 비트겐슈타인은 수학에 있어서 모순을 해결하거나 제거하는 방법을 문제삼으려 하지 않는다는 점이다. 둘째, 비트겐슈타인은 형식주의자들의 무모순성 증명을 평가절하 하려 하지 않는다는 점이다. 그의 목적은 그보다는 모순에 대한 형식주의자들의 태도를 비판하는데 있다. 비트겐슈타인의 말을

직접 들어보자.

> 나의 목적은 모순과 무모순성 증명에 대한 태도를 바꾸려는 것이다. (이 증명이 중요하지 않다는 말이 아니다. 어떻게 이 증명이 중요하지 않을 수 있겠는가?) (RFM, p.213)

비트겐슈타인이 의도하는 바는 수학자들이 형식주의에 입각해서 수학을 해서는 안된다는 것이 아니다. 형식주의의 입장이 강요되어서는 안된다는 점, 그리고 그 입장을 받아들이지 않을 경우 심연에 빠지리라는 우려가 그릇된 것임을 강조하려는 것이다. 비트겐슈타인은 1939년의 수학 기초론 강의 첫 시간에 다음과 같이 말하고 있다.

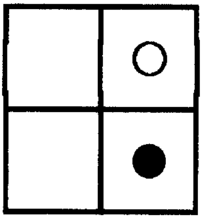
> 나는 때때로 새로운 해석을 시도하려 하는데 그 목적은 내 해석이 옳음을 보이려는 것이 아니라 낡은 해석과 새로운 해석이 동등하게 자의적임을 밝히려는 것이다. 나의 목적은 새로운 해석을 낡은 해석과 함께 놓고 "자, 이제 골라 봐라"라고 말하려는 것이다. (LFM, p.14)

형식주의자들은 왜 모순된 체계가 본질적으로 결함이 있다고 보는가? 모순된 체계는 어떠한 정식(well-formed formula)도 함축할 수 있으며 이로 말미암아 체계가 스스로 무너진다고 생각하기 때문이다. 비트겐슈타인은 수학자들이 이러한 입장을 택하는 것을 비난하지 않는다. 그는 모순된 체계가 어떠한 정식도 함축할 수 있다는 입장이 우리가 수학을 할 때 가질 수 있는 많은 입장 중의 하나에 불과할 뿐임을 강조한다. 즉 모순에 대해 다른 태도를 취할 수도 있다는 것이다. 이를 뒷받침하기 위해 비트겐슈타인(WVC, pp.124-125)은 다음과 같은 게임을 고찰한다. 흰 말과 검은 말이 이 게임의 놀이 말이다. 그리고 이들은 다음과 같은 규칙에 의해 움직인다.

(1) 흰 말은 검은 말을 뛰어넘어야 한다.
(2) 어떠한 말도 판 밖으로 나갈 수 없다.

이 게임에서 흰 말이 모서리에 위치한 검은 말 앞에 놓이게 될

경우 두 규칙은 서로 모순을 일으키게 된다. 규칙 (1)에 따라 흰 말이 검은 말을 뛰어넘게 할 경우 흰 말은 판 밖으로 나가게 되어 규칙 (2)를 위반하게 된다. 규칙 (2)에 따라 흰 말을 판 안에 묶어 둘 경우 우리는 그 결과로 규칙 (1)을 위반하게 된다.



우리는 이 상황에 대해 다음과 같은 상이한 태도를 취할 수 있다.

> (가) 이제 어떠한 놀이 말도 아무 방향으로나 움직일 수 있으며 따라서 게임은 제멋대로 돌아가게 된다.
> (나) 이 상황에서 무엇을 어떻게 해야 하는지 알 수 없으므로 게임은 더 이상 계속될 수 없다.

(가)의 경우 규칙들 사이의 모순은 게임을 아무렇게나 해도 된다는 결과를 초래하는 반면 (나)의 경우에는 같은 모순이 게임을 멈추게 하는 결과를 초래한다. 이 게임, 혹은 다른 게임에서 이와 유사한 상황을 만났을 때 우리는 (가)보다는 (나)를 택할 것이다. 즉 문제되는 상황을 타개할 새로운 규칙을 도입한 뒤 이에 의거해 게임을 속개할 것이다.

비트겐슈타인(WVC, p.125; LFM, p.221)에 따르면 수학에서도 이와 비슷한 상황이 발생한다. 가령 우리가 수를 0으로 나누어서는 안된다는 규칙을 제외한 모든 계산 규칙을 배웠다고 하자. 그렇다면 우리는 0으로 나눔에 의해서 3 = 5임을 증명할 수 있다. 또한 그 외의 계산 규칙에 의해서 3 ≠ 5임을 증명할 수 있다. 즉 우리는 모순에 봉착하게 되는 것이다. 이 모순에 대한 우리의 반응은 무엇인

가? 비트겐슈타인은 다음과 같이 말한다.

> 우리는 모순에 대해 어떠한 반응도 취하지 않는다. 우리는 다만 다음과 같이 말할 수 있을 뿐이다: 만일 그것이 정말이라면(모순이 존재하게끔 되어 있다면) 나는 그것을 이해할 수 없다. 혹은: 나는 그것에 대해 아는 바가 없다. 나는 그 기호[모순]를 이해하지 못한다. 그것에 대해 무엇을 어떻게 해야 하는지, 그것이 명령인지 등에 대해서 들어본 바 없다. (PG, p.303)

0으로 나눔이 초래하는 모순으로 말미암아 우리는 더 이상 수학을 할 수 없게 된다. 수학을 포기하든 가 아니면 0으로 나눔을 금지하는 규칙을 도입해야 할 것이다.(수학자들은 후자를 택하였다.)

위의 예에서 보았듯이 비트겐슈타인에 있어서 "모순을 어떻게 피할 것인가?" 하는 문제는 중요하거나 어려운 문제가 아니다. 이 문제는 모순을 금지하는 규칙을 도입하면 해결된다고 본다(WVC, p.120). 중요한 문제는 "모순에 봉착했을 때 우리는 어떻게 해야 하는가?"(Z, p.688)이다. 모순에 봉착한 게임을 포기해야 하는지, 혹은 모순을 금지하는 규칙을 도입한 뒤 게임을 속개해야 하는지는 우리에게 달려 있다. 모순 그 자체가 우리로 하여금 어떠한 결정을 하도록 강요하지는 않는다. 모순의 처리 문제를 포함한 게임의 제반 규칙을 정하는 것은 우리 인간이며 우리의 결정이 게임의 내용과 방향을 좌우하는 것이다.

그렇다면 "모순에 대한 수학자들의 미신에 가까운 두려움"(RFM, p.122)의 기원은 무엇인가? 비트겐슈타인은 그것이 게임의 비유를 수학에 무비판적으로 적용한데서 비롯된다고 본다. 게임의 규칙과 수학의 규칙을 동일시해서 마치 게임의 규칙이 모순을 일으켜서는 안되는 것처럼 수학의 규칙도 모순을 일으켜서는 안된다고 생각한다는 것이다. 이러한 생각이 굳어지면 ""p"가 규칙이면 "p · ~p"는 규칙이 아니라는 것이 '규칙'이라는 단어의 문법의 일부"(PG, p.304)라고 보게 된다. 이로 말미암아 우리는 '모순'을 '금지'와 혼동하기에 이른다. 수학의 규칙들이 서로 모순을 일으키면 우리는 이들 중 최소한 어느 하나가 반드시 금지되거나 제거되어야 한

다고 생각한다. 그러나 비트겐슈타인은 모순된 규칙이 규칙이 아니라고 하는 전제하에서만 모순의 금지가 요구된다는 사실을 강조한다. 우리는 전제를 바꾸어 줄 수도 있는 것이다.

비트겐슈타인(PG, pp.304-305)은 귀류법의 분석을 통하여 자신의 견해를 예증하려 한다. 직선 밖의 한 점에서 그 직선에 이르는 수선(垂線)이 오직 하나만 존재함을 귀류법에 의해 증명하는 과정을 살펴보자. 증명하려는 명제를 "s"로, 그 부정을 "~s"로 각각 기호화하자. 그리고 "삼각형의 내각의 합은 180도이다"라는 정리를 "p"로, 그 부정을 "~p"로 각각 기호화하자. "s"를 귀류법으로 증명하려면 "~s," 즉 "직선 밖의 한 점에서 그 직선에 이르는 수선은 하나만 존재하는 것이 아니다"가 모순을 일으킴을 증명하면 된다. 이제 직선 밖의 한 점에서 그 직선에 이르는 수선의 수가 둘이라고 가정해 보자. 그러면 두 수선과 원래의 직선은 삼각형을 형성할 것이다. 그런데 두 수선과 직선이 이루는 각이 각각 90도이므로 그 삼각형의 내각의 합은 180도를 넘게 된다. 이 결과는 앞서의 약호 법에 의해 "~p"로 기호화되고 이는 잘 알려진 정리 "p"와 모순을 일으킴을 알 수 있다. "~p"는 "~s"에서 연역된 정리이므로 "~s"가 곧 "p"와 모순을 일으키는 셈이며 따라서 "~s"는 부정되어야 한다. 그런데 "~s"의 부정은 "s"이므로 우리는 "s"를 증명한 셈이다.

이 귀류법적 증명에 대한 비트겐슈타인의 해석은 다음과 같다. 첫째, 우리가 "~p"를 받아들이지 않은 까닭은 그것이 어떤 사실과 어긋나서라기보다는(수학은 어떠한 사실에 관한 학문이 아니다) 그것이 우리에게 생소한 규칙이기 때문이다(PG, p.305). 우리는 이를

어떻게 이해하고 적용해야 할 지 알지 못한다. "~p"를 이해하고 적용할 수 있기 위해서 우리는 "~p"가 적용되는 게임에 대해 더 많은 것을 알아야 할 것이다. 둘째, 우리가 "~s"를 받아들이지 않은 까닭은 그로부터 연역된 "~p"가 이미 알려진 정리 "p"와 모순을 일으키기 때문이었다. 그런데 이러한 모순의 발생은 "~s"가 "~p"를 함축한다는 전제하에서만 가능하다(WVC, p.201). 물론 우리가 현재하고 있는 이 수학의 게임에서는 "~s"가 "~p"를 함축한다. 그러나 비트겐슈타인은 "~s"가 우리에게 친숙한 이 게임에 속하는 규칙인지를 의심한다. 그것이 전혀 다른 게임의 규칙이라면 그러한 게임에서 "~s"가 "~p"를 함축하는지는 확실하지 않다. 셋째, "~s"는 우리가 "~p"와 모순되는 "p"를 규칙으로 받아들였기 때문에 문제가 되는 것이지 그 이외에 우리가 "~s"를 그 자체 모순된 것으로 부정할 이유는 없다(PG, p.305).

비트겐슈타인은 "모든 것이 강제에 의해 일어난다는 믿음은 그릇된 것"(WVC, p.201)이라고 본다. 그에 의하면 우리가 수학을 할 때 우리는 자신도 모르게 모종의 숨은 조건들에 의해 속박된다. 삼각형의 내각의 합이 여러 값을 가질 수 있다면 기하학은 성립될 수 없다는 믿음이 그 한 예이다. 우리는 이러한 조건들과 부합하는 방향으로 수학을 하며 이 과정에서 오직 이 방향으로만 수학을 정의하는 과오를 저지르게 되는 것이다. 비트겐슈타인은 수학을 단일한 통일된 게임으로 간주하려는 태도에 반대한다. 무수히 많은 다양한 규칙들이 가능하고 그만큼 많은 다양한 수학의 게임들이 가능하다는 것이 그의 견해이다. 전통적으로 수학을 속박해 온 무모순성에서 벗어나 모순의 유도를 목적으로 하는 게임도 수학의 하나의 가능태로 인정해 주어야 한다는 것이다(WVC, p.139). 비트겐슈타인은 다음과 같이 말한다.

> 우리가 모순의 유도를 원한다면 어떨까? "봐라. 우리는 이렇게 해서 모순을 유도해 냈다"라고 자랑삼아 말한다면 어떨까? 가령 많은 사람들이 논리학의 영역에서 모순을 유도하려 노력하다가 그 중 결국 한 사람이 성공했다면 어떨까?
>
> 그러나 사람들은 왜 이러한 일을 해야만 했는가? 지금 당장으

> 로서는 가장 그럴듯한 목적이 떠오르지 않는다. 하지만 세상 만사가 불확실함을 보이기 위해서라고 말하면 어떨까? (RFM, p.211)

우리가 수학에서 모순이 발생해서는 안된다고 말한다면 우리는 이미 수학이라는 게임을 일정하게 정의하고 있는 것이다. 그러나 비트겐슈타인에 따르면 수학이 어떤 방식의 게임이어야 하는지를 결정하는 객관적 척도는 존재하지 않는다. 그는 우리가 왜 이러저러한 수학의 게임을 하는지에 대해서 "(생물학적, 역사적, 혹은 그와 유사한 종류의 근거 이외에는) 다른 근거를 댈 수 없다"(PG, p.304)고 본다. 우리가 모순이 발생해서는 안됨을 규칙으로 하는 수학의 게임을 하는 이유는 단지 무모순적인 게임만을 게임으로 간주하려는 우리의 태도에 기인한다. 비트겐슈타인의 관점에서 보았을 때 이는 편견에 불과하며 따라서 이를 준수해야 할 아무런 근거도 없다. 그는 다음과 같이 말한다.

> "규칙은 모순을 범해서는 안된다"는 "시계 바늘이 느슨해서는 안된다"는 명령과 유사하다. 우리는 이유를 예상한다: 왜냐하면 그렇지 않다면 …. 그러나 첫 번째 경우에서 그 이유는 다음과 같아야 할 것이다: 왜냐하면 그렇지 않다면 그것은 규칙이 아닐 것이기 때문이다. 다시 한번 우리는 논리적 근거를 댈 수 없는 문법적 구조와 마주하게 된다. (PG, p.304)

수학이라는 게임이 단일한 통일된 게임이 아니라 많은 다양한 게임을 총칭하는 집합 개념이라는 비트겐슈타인의 견해는 게임에 대한 분석에 의해서 뒷받침된다. 그에 의하면 게임의 예들을 관통하는 공통된 특징은 존재하지 않으며 오직 예들 간에 복잡하게 얽혀있는 유사성이 존재할 뿐이다(PI, 65-66). "수의 종류가 가족을 형성"(PI, 67)하는 것처럼 수학은 다양한 게임의 가족이다. 자연수론, 무리수론, 초한수론, 확률론, 집합론, 해석 기하, 위상 수학 등등. 이들을 관통하는 공통된 특징은 존재하지 않으며 따라서 수학은 하나의 그림으로 정의되지 않는다. 수학은 가족 유사성을 갖는 다양한 게임들에 의해 채워지는 열린 개념인 것이다(RFM, pp.176, 182, 226).

이를 근거로 비트겐슈타인은 형식주의뿐 아니라 논리주의도 배격한다. 수학을 논리학에로 환원하려는 논리주의자들은 수학을 단일한 게임으로 잘못 보고 있기 때문이다. 비트겐슈타인에 의하면 논리주의자들의 견해와는 달리 수학의 본질이나 확정적 영역은 존재하지 않는다. 수학은 다양한 게임들의 집합체이며 이 게임들은 어떠한 명확한 영역의 구분이 없이 서로 복잡하게 얽혀 있는 것이다.

비트겐슈타인의 주장대로 수학이 다양한 게임의 총체라면 수학의 근거와 기본적 구조를 밝힌다는 형식주의의 메타 수학도 성립할 수 없다. 메타 수학은 논리주의처럼 수학을 동질적이고 단일한 구조물로 잘못 보고 있기 때문이다. 그러나 규칙의 허용과 금지에 의해 우리는 수학의 게임들 하나 하나를 정의할 수 있을 뿐이지 절대로 수학이라는 게임 그 자체를 정의하지는 못한다. 비트겐슈타인은 메타 수학도 수학의 다양한 게임들의 한 예에 불과할 뿐이라고 본다.

> 나는 일정한 규칙에 따라 체스 게임을 할 수 있다. 하지만 나는 규칙들 그 자체에 대한 게임도 발명할 수 있다: 이제 체스의 규칙은 내 게임의 놀이 말이며 가령 논리학의 법칙들이 그 게임의 규칙이 된다. 이 경우에 나는 메타 게임을 하는 게 아니라 단지 또다른 하나의 게임을 하고 있는 것이다.
>
> 힐버트의 작업은 메타 수학이 아니라 수학이다. 그것은 또다른 하나의 연산에 불과하다. (WVC, pp.120-121)

비트겐슈타인은 논리주의나 형식주의 수학이 수학에 기여한 바를 부정하지 않는다. 그가 부정하는 것은 논리주의나 형식주의가 수학의 확고한 토대를 마련한다는 철학적 견해이다. 비트겐슈타인은 수학의 근거가 수학을 떠받치는 어떠한 이론적, 철학적 하부 구조에 의해 마련된다는 견해를 부정하는 것이다.

3. 튜링/비트겐슈타인 논쟁

모순에 대한 비트겐슈타인의 견해는 그의 여러 저술들에 흩어져 있지만 1939년에 그가 행한 수학 기초론 강의에서 가장 완벽한 형

태로 제시되어 있다. 이 강의에 참석한 논리학자 튜링은 모순의 문제를 둘러싸고 비트겐슈타인과 정면으로 대립하고 있다. 우리는 이제 이 강의에서 제시된 비트겐슈타인의 모순론을 정리해 보고 이에 대한 튜링의 비판과 비트겐슈타인의 응수를 살펴볼 것이다.

1939년의 강의에 나타난 비트겐슈타인의 모순론은 다음의 세 가지 주장으로 요약된다(Cf. Wrigley 1980, pp.347-348).

> (1) 수학에서 숨은, 즉 발견되지 않은 모순은 중요하지 않다 (LFM, p.219).
> (2) 모순이 실제로 발견되었을 때 우리는 다만 모순이 다시 발생 못하게 하는 규칙을 만들어 주면 그만이다(LFM, p.220).
> (3) 이러한 조처가 꼭 필요한 것도 아니다. "[모순이] 발생해도 아무런 해가 되는 것이 아니기"(LFM, p.219) 때문이다.

숨은 모순이 중요하지 않다는 첫 번째 주장은 무모순성 증명의 중요성을 역설하는 형식주의자들을 겨냥한 것처럼 보인다. 형식주의자들의 견해를 액면 그대로 받아들인다면 우리는 무모순성 증명이 이루어지지 않은 수학의 체계에서 수학을 하는 것을 단념해야 할 것이다. 이러한 경직된 입장보다는 오히려 숨겨진 모순을 가볍게 보는 비트겐슈타인의 자유방임적 태도가 일선 수학자들의 공감을 살는지도 모른다. 더구나 괴델(Gödel 1931)의 불완전성 증명에 의해 형식주의의 무모순성 증명 작업이 일정한 한계를 갖고 있음이 드러난 바 있다.

그러나 무모순성 증명이 이루어지지 않은 수학의 체계가 언제라도 자체 모순을 노정할 수 있다는 형식주의의 위협에 굴하지 않는 수학자들이 그렇다고 곧 비트겐슈타인의 나머지 두 입장을 받아들인 것은 아니다. 특히 그의 두 번째 주장은 수학과 논리학에 대한 무지의 소치에 불과한 것으로 무시되어 왔다(가령 Chihara 1977). 이러한 비판이 미친 영향력을 감안해서 일단 그 타당성의 평가는 잠시 뒤로 미루고 비판의 핵심만을 객관적으로 정리해 보겠다.

앞서 살펴본 바와 같이 비트겐슈타인은 어떤 체계에서 모순이 발견되면 그 체계로부터 어떠한 정식도 연역해 낼 수 있으므로 결

국 그 체계가 무너지게 된다는 전통적 견해에 찬성하지 않는다. 그는 프레게의 체계에서 럿셀(Russell)이 모순을 발견한 사실에 대해 다음과 같이 말하고 있다.

> 당신은 프레게의 체계에 의해 p · ~p를 얻게 된다. 당신이 그로부터 어떠한 결론도 추론해 낼 수 있다는 사실이 바로 당신이 봉착한 문제의 전모이다. 이에 대해 나는 다음과 같이 말할 것이다. "그러면 모순으로부터 어떠한 결론도 추론하지 마시오." (LFM, p.220)

튜링을 위시한 비트겐슈타인의 비판자들은 그가 여기서 두 가지 오류를 범하고 있다고 본다. 첫째, 비트겐슈타인은 특정한 하나의 모순에 초점을 두고 있지만 사실 모순된 체계에서는 무수히 많은 모순을 연역해 낼 수 있다. 둘째, 모순으로부터의 추론을 금지함으로써 모순된 체계에서 어떠한 결론도 추론해 낼 수 있는 상황을 개선하려는 비트겐슈타인의 계획은 이루어질 수 없다. 튜링의 비판을 직접 들어보자.

> (모순으로부터의 추론을 금지하는) 것으로는 충분하지 않다. 그것을 규칙으로 삼는다 해도 우리는 실제로 모순을 통하지 않고도 어떠한 결론도 추론해 낼 수 있기 때문이다. (LFM, p.220)

튜링의 입장을 지지하는 치하라(Chihara 1979, pp.329-330)는 프레게의 체계를 예로 이를 설명한다. 프레게의 체계를 「S」로 기호화하자. 럿셀이 증명한 것은 「S」에는 다음과 같은 명제 "p"가 존재한다는 것이다.

1. 「S」는 "p"를 함축한다.
2. 「S」는 "~p"를 함축한다.

이로부터 다음이 추론된다.

3. 「S」는 "p · ~p"를 함축한다.

비트겐슈타인의 제안대로 3으로부터 더 이상 추론을 하지 못하게 하는 규칙을 설정해도 우리는 여전히 1과 2로부터 어떠한 임의의 명제도 끌어낼 수 있다. 임의의 명제 "a"에 대하여 다음이 성립하기 때문이다.

4. 1에 의하여 「S」는 "p ∨ a"를 함축한다.
5. 2와 4에 의하여 「S」는 "a"를 함축한다.
6. 그러므로 「S」로부터 어떠한 명제도 추론할 수 있다.

치하라는 모순으로부터의 추론을 금지하는 규칙을 도입함으로써 모순된 체계를 지켜보려는 비트겐슈타인의 시도가 위의 추론으로 말미암아 봉쇄된다고 결론짓는다. 모순으로부터가 아니라도 모순된 체계로부터 직접 모든 정식들이 추론될 수 있기 때문이다.

튜링은 모순이 아무런 해가 없으며 따라서 모순된 체계를 개정할 필요가 없다는 비트겐슈타인의 세 번째 주장도 마찬가지로 부정한다. 튜링은 체계의 모순을 방치한다면 엄청난 결과가 초래될 것이라고 비판한다. 가령 다리를 건설하는데 모순된 계산 체계를 사용한다면 다리가 무너지게 된다는 것이다(LFM, p.211). 그런데 비트겐슈타인은 이러한 비판을 다음과 같이 일축한다.

> 모순으로 말미암아 다리가 무너질 것이라는 말은 옳지 않아 보인다. 우리는 다음과 같은 두 가지 실수로 말미암아 다리가 무너진다고 본다.
> (a) 그릇된 자연법칙--그릇된 계수--을 받아들여 왔다.
> (b) 계산 상의 착오가 있었다--누군가 계산을 잘못했다.
> 첫 번째 경우는 분명히 모순과 아무 상관이 없고 두 번째 경우는 명확하지 않다. (LFM, p.211)

튜링은 비트겐슈타인이 여기서 다음과 같은 제 삼의 경우를 간과하고 있다고 지적한다.

> 프레게의 기호 체계에 의거해 계산을 한다면 럿셀의 역설에 의해 계산의 결과가 잘못 나오게 될 수 있을 것이다. (LFM,

p.218)

모순된 계산 체계가 다리 건설에 요구되는 계산을 망쳐 놓을 것이고 이로 말미암아 다리가 무너지게 된다는 것이다.

지금까지 우리는 비트겐슈타인의 모순론에 대한 튜링의 비판을 살펴보았다. 이제 우리는 비트겐슈타인의 입장에서 이에 답해 보고자 한다. 우리는 먼저 비트겐슈타인의 모순론이 수학과 논리학의 무지에서 비롯된 궤변이며 그가 튜링의 비판을 이해하지 못했다는 일부의 견해가 사실과 맞지 않음을 주지할 필요가 있다. 모순에서, 혹은 모순된 체계에서 어떠한 정식도 추론됨을 보이는 전통 논리학의 간단한 증명을 논리학을 전공한 비트겐슈타인이 몰랐거나 이해 못했다면 이는 분명 놀라운 사건이다. 그런데 튜링의 반론은 9년 전에 비트겐슈타인과 바이스만(Friedrich Waismann) 간의 토론 과정에서 제기된 이래(WVC, pp.130-132) 여러 차례 반복되어 온 바 비트겐슈타인이 이를 몰랐거나 이해 못했을 리 없다. 더욱 중요한 사실은 비트겐슈타인이 튜링의 비판을 논리적으로 틀렸다고 보지 않는다는 점이다. 비판에 대한 비트겐슈타인의 일관된 태도는 그것이 자신의 논점에서 빗나가 있다는 것이다.

모순된 프레게의 체계 「S」에서 모순을 통하지 않고도 원하는 모든 정식을 체계로부터 직접 추론해 낼 수 있음을 보이는 치하라의 증명은 타당하다. 그러나 우리는 그의 증명이 "「S」는 "p"를 함축한다," "「S」는 "~p"를 함축한다"는 두 전제에서 출발함을 주목할 필요가 있다. 「S」가 "p"와 "~p"를 각각 함축한다면 이는 곧 「S」가 "p · ~p"를 함축함을 함축한다. 전통 논리학의 관점에서 보았을 때 연접(conjunction)에 있어 연접되는 두 항(conjuncts)을 따로 다루거나 함께 다루거나 별 차이가 없기 때문이다. 그렇다면 치하라의 증명은 「S」가 "p · ~p"를 함축한다는 전제에서 출발하고 있는 셈이며 따라서 바로 이 증명을 막는 규칙을 도입하자는 비트겐슈타인의 제안은 여전히 유효하다. 치하라의 증명에 대한 비트겐슈타인의 비판의 초점은 증명의 결론이 아니라 증명의 전제에 있으며 증명이 시작되기 전에 이 증명을 무효화하는 규칙을 도입하자는 것이다.

결국 튜링과 치하라는 모순된 체계에서 모순으로부터 원하는 모든 정식을 추론할 수 있다고 보는 반면 비트겐슈타인은 같은 상황을 달리 볼 수도 있다는 입장이다. 비트겐슈타인은 모순을 체계의 꼬임으로 보아 이 꼬임을 풀거나 끊지 않는 한 모순으로부터 어떠한 추론도 할 수 없다고 생각할 수도 있다는 것이다. 튜링의 입장을 택하는 것은 하나의 규칙 체계를 택하는 것에 해당하고 비트겐슈타인의 입장을 택하는 것은 그와 다른 규칙 체계를 택하는 것에 해당한다. 우리가 이처럼 모순에 관해 서로 다른 규칙을 택할 수 있고 이로 말미암아 우리가 하는 게임의 양상도 달라진다는 것이 비트겐슈타인의 생각이다.

모순된 체계를 적용했을 때 엄청난 결과가 초래될 것이라는 튜링의 비판에 대해서도 비트겐슈타인은 같은 상황을 달리 볼 수 있다고 응수한다. 모순된 체계에서 서로 상이한 두 결과가 추론될 수 있으며 이로 말미암아 우리가 혼란에 빠지게 된다는 견해를 반드시 고집할 필요는 없다는 것이다. 그는 다음과 같이 말한다.

> 계산의 두 가지 방식이 있다면 왜 이들 모두를 계산이라고 부르는가? 하나를 계산-A로, 다른 하나를 계산-B로 부르면 어떤가? 당신은 단지 두 가지 다른 종류의 계산법이 각각 다른 결과를 초래한다는 사실을 모르고 있었던 것이다. (LFM, p.216)

마찬가지로 모순에서 어떠한 정식도 유도될 수 있으며 따라서 모순된 체계는 결함이 있는 체계라고 믿는 사람에게 비트겐슈타인은 다음과 같이 응수한다.

> 그 경우에 계산법은 두 부분으로 이루어져 있다. 모순의 발견에 이르기까지의 과정이 그 첫 부분에 해당되고, 아무 정식이나 써내려 가는 것이 허용되는 단계가 그 둘째 부분에 해당된다. (WVC, p.197)

상이한 결과를 초래하는 계산의 두 방식이 엄청난 결과를 초래하지는 않을까? 가령 만일 우리가 이 중 한 방식으로 하중(荷重)을

계산하고 나머지 방식으로 다리의 재료인 철근의 강도를 계산한다면 다리가 무너질 것이 아닌가? 어떻게 모순된 계산 체계를 그렇지 않은 계산 체계와 같은 방식으로 사용할 수 있다는 말인가? 이에 대해 비트겐슈타인은 다음과 같은 세 가지 답변을 준비하고 있다.

(1) 모순이 곧바로 우리에게 재난을 가져다주는 것은 아니다(LFM, p.212). 모순된 계산 체계에서 비롯되는 모순된 귀결을 놓고 우리는 계산 체계가 쓸모 없다고 볼 수도 있고, 혹은 계산 체계에는 아무런 문제가 없는데 우리의 경험적 지식의 어떤 부분이 잘못되어 있다고 볼 수도 있다. 이를 설명하기 위해 비트겐슈타인(LFM, pp.211-212)은 다음과 같은 예를 든다. 어떤 부족의 현자가 부족민들에게 계산법을 가르쳤다. 그가 타계하기 직전에 그는 계산에 대한 가르침을 남겼는데 사실은 다음과 같이 틀린 것이었다.

$$3678 \times 19375 \doteqdot - - - - - -$$

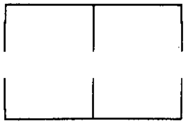
후에 부족민들은 계산 상의 모순을 발견하게 된다. 가령 그들이 병사의 수를 세는 과정에서 처음으로 문제에 봉착한다면 그들은 무어라고 말할 것인가? 비트겐슈타인은 다음과 같이 주장한다.

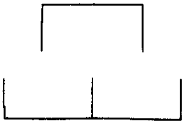
> 그들은 현자가 틀렸다고 하면서 그가 가르친 계산 규칙을 폐기할지도 모른다. 그러나 그들은 꼭 그래야만 하는가? "이제 우리는 이것과 아울러 반대되는 것도 함께 받아들일 것이다"라고 말할 수는 없을까? 그러면 이제 문제는 그것을 어떻게 사용할 것인가 하는 점이다. 혹은 "현자께서 옳으셨어. 그런데 우리가 병사를 셀 때 한 병사가 사라지거나 새로 나타나는 것이야"라고 말할 수도 있다. (LFM, p.212)

마찬가지로 다리를 건설하는데 사용된 모순된 계산법에 대해서도 "나중에 우리는 아마 다리의 재료인 철근의 탄성이 계속 변한다고 말할지 모른다"(LFM, p.217). $3678 \times 19375 \doteqdot - - - - - -$의 경우에서 보았듯이 사실과 계산법은 여러 가지 방법으로 상호 균형을 유지할 수 있다. 부족민들의 경우에 그들이 모순을 발견했을 때 어떤 행동을 취할 것인가는 "그들이 그 [틀린] 정식을 받아들이는 이

유, 그 정식이 그들에게 의미하는 바에 달려 있을 것이다"(LFM, p.212).

(2) 비트겐슈타인(LFM, pp.214-215)은 모순된 계산법을 그렇지 않은 계산법과 같은 방식으로 사용할 수 없다는 말이 애매 모호하다고 본다. 그 말이 두 가지 다른 의미를 가질 수 있기 때문이다. 첫째, 다리를 건설하는데 모순된 계산 체계를 사용할 수 없음을 의미할 수 있다. 둘째, 모순된 계산법의 사용이 모순되지 않은 계산법의 사용과 "같은 방식의 사용"이 아님을 의미할 수도 있다. 비트겐슈타인은 이를 설명하기 위해 다음의 예를 든다. 두 개의 3단자 전극이 서로 마주해 있다. 두 전극의 단자끼리 서로 접촉하면 세 개의 벨이 울린다. 이 경우에 그 중 한 전극이 2단자 전극이라면 "그것을 같은 방식으로 사용할 수 없다"는 말은 애매하다. 만일 그 말이 물리학의 명제라면 "그것을 같은 방식으로 사용할 수 없다"는 말은 그것을 사용했을 때 세 개의 벨이 울리지 않을 것임을 의미한다. 한편 하나의 방식이 다음의 첫 번째 그림과 같이 표현되고 다른 하나의 방식이 두 번째 그림과 같이 표현된다면 "그것을 같은 방식으로 사용할 수 없다"는 명제는 정의에 의해서 참이다. 그 명제가 단지 '같은 방식'의 정의에 준거하고 있기 때문이다(LFM, p.215).





모순된 계산법에 대해서도 마찬가지이다. "모순된 계산법을 그렇지 않은 계산법과 같은 방식으로 사용할 수 없다"는 명제가 그 계산법에 의거해 건설된 다리는 무너진다는 사실을 의미한다면 그것

은 경험적 명제이다. 다리가 무너지는지의 여부는 계산법이 아닌 물리학에 의해서 결정될 일이다. 계산법은 다리와 같은 사실적 대상에 관한 것이 아니므로 계산법 때문에 다리가 무너졌다는 말은 문법적 오류에 해당한다. 계산법 자체는 참도 거짓도 아니며 단지 그것을 이러저러한 경우에 사용할 수 없을 뿐이다. 산술 체계의 무모순성 증명이 다리를 건설하는데 필요 불가결하다는 주장은 그러한 증명이 불가능하다는 괴델의 증명에 의해서도 논박된다.

한편 "모순된 계산법을 같은 방식으로 사용할 수 없다"는 명제가 모순된 계산법이 계산법으로 간주될 수도 없음을 의미한다면 그 명제는 "같은 방식"이라는 표현의 정의에 의해서 참이 된다. 그 명제는 경험적 명제가 아니라 문법적 명제인 것이다.

(3) 설령 우리의 계산 체계가 모순된 것이라 해도 우리는 제멋대로의 계산을 다 받아들이지 않는다. 물론 이론적으로는 튜링의 주장대로 우리가 프레게의 체계로부터 럿셀의 역설에 의해 "2 × 2 = 369"라는 결론에 도달할 수도 있다(LFM, p.218). 그러나 보다 중요한 사실은 우리는 실제로 결코 그렇게 하지 않는다는 점이다. 일상생활에서 우리는 "2 × 2 = 369"를 계산으로 간주하지도 않는다. 우리는 언제나 "2 × 2"가 "4"와 같다고 생각한다. 설령 모순된 계산법을 사용하는 상황에서도 우리는 결코 제멋대로의 계산을 계산으로 간주하지 않을 것이다.

비트겐슈타인은 우리가 모순을 피하려는 이유가 이론적인 것이 아니라 실제적(practical)인 데 있다고 본다(RFM, p.214). 교사가 학생에게 상호 모순된 명령을 내렸다면 학생은 어찌할 바를 몰라 당황하게 될 것이다. 물론 교사가 학생을 당황하게 하기 위해서 고의로 이러한 짓을 했을 수도 있지만 일반적으로 명령이 수행되려면 상호 모순되어서는 안된다는 것이 모순된 명령이 주는 교훈이다 (LFM, p.213).

사실 수학이나 논리학에서 모순은 오직 거짓말장이의 역설과 같은 극히 제한된 분야에서만 발생한다. 수학자들과 논리학자들이 모순을 피하려 하고 모순이 발생하면 그것을 체계의 암적인 존재로 간주하려 하는 것도 사실이다. 비트겐슈타인은 이러한 태도 자체를

그릇된 것으로 부정하기보다는 이러한 태도가 함축할 수 있는 잘못된 생각을 경계하려 한다. 그는 다음과 같이 말한다.

> (a) 우리는 실제로 모순을 피하려 한다. (b) (우리가 받은 교육을 고려할 때) 혼란을 막으려면 모순을 피해야 한다.
> 그러나 논리학에서 모순을 피해야 한다는 주장은 이와는 전혀 다른 주장이다. (LFM, p.213)

물리학을 할 때 우리는 물론 모순을 범하지 않으려 한다. 프레게(Frege 1893, p.12)처럼 수학이나 논리학의 법칙을 물리학의 법칙과 유사한 것으로 간주하려는 태도에서 수학이나 논리학에서 모순이 존재해서는 안된다는 신념이 싹튼다(LFM, p.214). 그러나 수학이나 논리학은 물리학이 아니다. 수학이나 논리학에서 모순이 발생했을 때 그로 말미암아 우리가 어떤 사실과 모순을 일으키는 것은 아니다.

비트겐슈타인(LFM, p.230)은 모순을 허용하는 것이 결국 수학이나 논리학 자체를 포기하는 셈이라는 견해를 그릇된 것으로 부정하지 않는다. 원한다면 그러한 견해를 받아들일 수도 있다는 것이다. 그러나 비트겐슈타인은 수학이나 논리학을 그런 식으로 규정하는 근거가 그것이 참이기 때문이라는 생각을 부정한다. 그의 말을 직접 들어보자.

> (우리가 모순률을 받아들이는 이유는) 어떤 특정한 진리를 확신해서라기 보다는 그렇게 하고 싶어서 이다. 논리학에 반하는 일을 한다는 것은 우리가 원하지 않는 어떤 것을 행함을 의미한다. (LFM, p.230)

우리가 오늘 원하는 것을 내일도 원할 것이라는 보장은 없다. 물론 이러한 변화는 내일 휴강을 하기로 결정한다거나 컴퓨터 게임의 규칙을 바꾸는 것과 같은 개인적 결정과는 구별되어야 할 것이다. 그러나 모순을 이러저러한 방식으로 다루기로 하는 결정은 분명 규약의 문제이다. 기존의 규약이 갖는 효율성, 다른 규약에 대한 불만 등의 요소를 제외하고는 수학자로 하여금 기존의 규약을 받아들

이게끔 강요하는 수학적 근거는 존재하지 않는다.

4. 논리학과 모순

모순에 대한 전통적 견해를 추종하는 사람은 비트겐슈타인의 자유방임적 태도를 받아들이기 어려울 것이다. 그는 비트겐슈타인이 모순으로부터 어떠한 명제도 추론된다는 전통적 견해에 반대하는 까닭을 프레게의 영향에서 찾으려 할는지도 모른다. 다음에서 보듯이 프레게는 거짓된 전제로부터의 추론을 부정하고 있다.

> 참으로 인정되지 않은 생각은 전제가 될 수 없다. 생각은 나에 의해 참으로 인정된 이후에야 전제가 될 수 있다. 가설은 전제로 쓰일 수 없다. (Frege 1912; Cf. Bell 1979, pp.90-92)

생각은 프레게(Church 1948; Cf. Frege 1918)와 비트겐슈타인(TLP, 4)에 있어서 모두 명제에 해당하므로 프레게는 여기서 거짓된 명제로부터의 추론을 부정하고 있다고 보아야 한다. 모순은 거짓된 명제이므로 비트겐슈타인은 결국 프레게의 견해를 답습하고 있는 것이 아닐까?

이러한 해석은 비트겐슈타인이 프레게의 찬미자이자 동시에 비판자라는 사실을 간과하고 있다. 비트겐슈타인은 이미 자신의 초기 저작에서 프레게의 견해를 다음과 같이 정면으로 부정하고 있다.

> 우리는 거짓된 명제로부터 추론을 할 수 있다. (TLP, 4.023; NB, p.16)

조건적 증명을 포함한 제반 간접 증명은 프레게가 부정한 가능성, 즉 거짓된 전제로부터의 추론에 의해 가설을 배제하는 가능성에 의존되어 있다. 프레게와는 달리 비트겐슈타인은 이러한 종류의 증명들의 타당성을 의심하지 않는다.

필자는 비트겐슈타인이 모순으로부터 어떠한 명제도 추론된다는 전통적 견해에 반대하는 근거가 그가 제시하는 '논리학에서의 증

명'과 '의미 있는 명제의 논리적 증명'의 구분에 있다고 본다. 이 두 증명이 의미하는 바와 둘 사이의 구분을 살펴보자. 비트겐슈타인은 트락타투스에서 이 구분에 대해 다음과 같이 설명하고 있다.

> 논리학에서의 증명이란, 동어반복(tautologies)이 복잡할 경우, 그것이 동어반복이라는 것을 인지하기 쉽게 하기 위한 기계적 보조 수단일 뿐이다.
>
> 의미 있는 명제가 다른 명제로부터 논리적으로 증명될 수 있고, 논리적 명제도 역시 그렇게 될 수 있다면 이것은 실로 매우 주목할 만한 일일 것이다. 의미 있는 명제의 논리적 증명과 논리학에서의 증명이 두개의 전혀 다른 것이어야 한다는 것은 애초부터 분명하다. (TLP, 6.1262, 6.1263)

이 구분은 그의 초기 노우트에서도 발견된다.

> 그러므로 하나의 논리적 명제가 다른 명제에서 논리적으로 추론된다 함은 하나의 실제(real) 명제가 다른 실제 명제에서 논리적으로 추론된다는 것과는 전혀 다른 것을 의미한다. 따라서 소위 논리적 명제의 증명은 그것이 참임을 증명하는 것이 아니라 … 그것이 논리적 명제임(동어반복임)을 증명한다. (NB, p.108)

실제 명제의 논리적 증명과 논리학에서의 증명의 구분을 이해하기 위해서는 논리적 명제와 실제 명제의 구분을 먼저 이해해야 한다. 트락타투스에 있어서 그 구분은 다음과 같다(이승종 1991, 2장 참조).

> (1) 동어반복과 모순은 논리적 명제이다. 동어반복은 모든 경우에 참이고 모순은 모든 경우에 거짓이다.
>
> (2) 동어반복도 모순도 아닌 명제가 실제(genuine) 명제이다. 실제 명제는 어떤 경우에는 참이고 어떤 경우에는 거짓이다.

논리적 명제와 실제 명제의 구분이 함축하는 바를 다음의 논증을 예로 살펴보자.

$$\frac{p \cdot \sim p}{q}$$

여기서 "q"는 임의의 실제 명제를 지칭한다. "(p · ~p) ⊃ q"가 동어반복이므로 이 논증은 타당하다. 그런데 문제는 논증의 전제가 모순이라는 점이다. 모순은 실제 명제가 아니므로 이 논증이 하나의 실제 명제로부터 다른 실제 명제의 추론에 해당한다고 볼 수 없다. 비트겐슈타인은 위의 논증이 논리학 내에서 다루어졌을 때 그 타당성과 그 효율성을 부정하지 않는다. 위의 논증은 타당한 추론이며 또한 "(p · ~p) ⊃ q"가 동어반복임을 인지하는데 기여한다. 그러나 비트겐슈타인은 위의 논증을 모순에서 임의의 실제 명제가 추론되는 것으로 해석하지 않고 단지 동어반복을 인지하기 쉽게 하기 위한 기계적 보조 수단으로만 간주한다. 그는 다음과 같이 말한다.

> 그리고 이것이 논리적 명제를 "증명"할 때 우리가 하는 작업이다. 우리는 의미(sense)와 뜻(meaning)에 신경을 쓰지 않고도, 단지 기호 규칙들에 따라, 다른 명제들로부터 논리적 명제를 구성하기 때문이다. (TLP, 6.126)

명제의 의미에 신경을 쓰는 사람들이 보기에 모순으로부터 어떠한 실제 명제도 연역될 수 있다는 주장은 매우 이상하게 들릴 것이다. 일상적 상황에서는 아무 실제 명제가 모순에서 무작위로 추론될 수 있다는 것은 말이 되지 않는다. 어떤 사람이 "지금 비가 오고 비가 오지 않는다"라고 말했을 때 우리는 그로부터 "지금 눈이 온다"는 정보를 얻는다고 할 수 없다. 이러한 맥락에서 비트겐슈타인은 논리학에서의 증명이 실제 명제의 증명과는 구별되어야 함을 제안한 것이다. 즉 모순으로부터 어떠한 명제도 유도될 수 있다는 규칙은 전통적으로 '논리학'이라고 불리어지는 게임의 일부일 뿐 모순의 고유한 속성은 아닌 것이다.

비트겐슈타인은 논리학 내에서의 증명보다는 생활 속에서 실제 명제의 논리적 증명에 더 관심을 가지고 있다. 생활 속에서 논리적 명제의 역할은 수학적 명제의 역할과 유사하다. 비트겐슈타인은 다음과 같이 말한다.

> 생활 속에서 우리가 필요로 하는 것은 결코 수학적 명제가 아니다. 오히려 우리는 수학에 속하지 않는 명제들로부터, 마찬가지로 수학에 속하지 않는 다른 명제들을 추론하기 위해서만 수학적 명제를 사용한다.
> (철학에서 "무엇 때문에 우리가 실제로 이 낱말, 이 명제를 사용하는가?"라는 물음은 언제나 다시 우리를 가치 있는 통찰에로 인도한다.) (TLP, 6.211)

일상생활에서의 추론이 논리학에 많이 의존되어 있는 것은 사실이지만 언제나 그러한 것은 아니다. 가령 일상생활에서는 논리학에서와는 달리 모순으로부터 더 이상의 추론을 하지 않는다. 그러나 일상생활에서의 추론을 논리학에서의 추론과 다르다는 이유로 비논리적으로 보아도 안되고 논리학에서의 추론을 절대적인 것으로 신성시해서도 안된다는 것이 비트겐슈타인(PI, 38)의 견해이다.

트락타투스에서 비트겐슈타인은 일상 언어가 논리학에서 요구하는 정확성과 엄밀성을 결여하고 있다고 보았다. 그는 일상 언어의 애매성, 모호성, 불확정성 등을 싫어해서 일상 언어 배후의 순수한 논리적 구조에 더 관심을 기울였다. 그는 일상 언어가 생각을 은폐하므로 이 은폐를 제거하기 위해 논리학이 필요하다고 보았다. 명제에 대한 완전한 분석은 오직 하나밖에 없으며(TLP, 3.25) 논리적 구문법에 지배되는 오직 한 종류의 기호 언어만이 존재한다는 것이다(TLP, 3.325). 아울러 트락타투스에서 논리학은 모든 실재의 구조로, "세계가 반영된 상(像: image)"(TLP, 6.13)으로 성화되었다. 논리학을 인간의 작업이 아닌 숭고한 주제로 간주하는 비트겐슈타인의 태도는 다음에서 보듯이 트락타투스 이외의 저작에서도 발견된다.

> 내가 여기서 생각이라고 부르는 것은 본질적으로 인간의 작업이 아니다. 논리학에서 나는 인간의 작업에 관심이 없다. (MS, 109, 43)

> 생각이 생각이 되게끔 하는 것은 인간적인 어떤 것, 인간의 본성과 구조에 연관된 어떤 것이 아니라 순전히 논리적인 어떤 것, 즉 생물의 자연사(natural history)에서 독립된 어떤 것이다. (MS, 108, 217)

논리학에 대한 비트겐슈타인의 견해는 그 이후 극적으로 반전한다. 위의 인용에서 그가 부정하던 견해를 그 스스로 전격적으로 받아들이게 되는 것이다. 다음의 인용을 앞서의 인용과 비교해 보자.

> 논리적 추론은 언어 게임의 일부이다. 언어 게임에서 논리적 추론을 하는 사람은 언어 게임을 실제로 배우는 과정에서 그가 익힌 일정한 지침을 따른다. (RFM, p.397)

> 논리적 추론은 언어 게임의 규칙이다. (RFM, p.401)

> 생각과 추론(가령 계산)은 물론 자의적 정의에 의해서가 아니라 우리가 생활에서 생각과 추론이라 부르는 것의 자연적 한계에 의해서 그 테두리가 정해진다. (RFM, p.80)

비트겐슈타인은 "논리학이 럿셀, 프레게, 그리고 내가 생각했던 것과는 다른 역할을 한다"(L, p.261)고 단정적으로 말한다. 가령 비트겐슈타인은 동어반복이 참이라는 논리학의 진리가 우리가 일상 언어의 쓰임에 익숙해지면 자연스레 인정하게 되는 자명한 진리가 아니라 오직 논리학을 배우는 과정에서 인위적 훈련에 의해서만 받아들이게 되는 견해라고 본다(LFM, p.188; Cf. Osherson and Markman 1975). 그는 다음과 같이 말한다.

> 실제적 언어를 우리가 정밀하게 조사할수록 언어와 우리의 요구 사이의 갈등은 더욱 첨예화된다. (논리학의 투명한 순수성은 물론 탐구의 결과가 아니라 요구 조건이었기 때문이다.) 갈등은 허용 범위를 넘게 되어 요구 조건이 백지화될 위기에 처한다.--우리는 마찰이 없는 미끄러운 얼음판으로 잘못 들어섰던 것이다. 어떤 의미에서 그 조건은 이상적인 것이고 그로 말미암아 우리가 걸을 수 없게 된 것이다. 걷고 싶다: 그러므로 마찰이 필요하다. 거친 땅으로 되돌아가자! (PI, 107)

논리학은 더 이상 어떠한 마찰도 면제된 숭고하고 이상적인 주제가 아니다. 실제 언어의 운용이 언제나 논리학에 들어맞는 것은 아니다. "거친 땅으로 되돌아가자"는 말은 일상 언어가 생활 속에서

어떻게 사용되는가에 좀더 관심을 기울이자는 뜻이다. 일상 언어의 관점에서 논리학을 보아야지 논리학을 통해 일상 언어를 해부해서는 안된다는 것이다. "**미리 예정해 놓은** 투명한 순수성은 우리의 탐구를 180도 돌려놓았을 때에만 제거될 수 있다"(PI, 108). 비트겐슈타인의 견해를 좀더 들어보자.

> 우리가 이를 증명이라 부르는 까닭은 그것이 적용 가능하기 때문이다; 그리고 우리가 그것을 예측에 쓸 수 없다면, 적용할 수 없다면 우리는 그것을 증명이라고 부르지 않을 것이다.-- "증명"이라는 단어는 일상 언어에서 택한 것으로서 그 단어가 사용되는 까닭은 오로지 그것이 일상적 의미에서 무엇인가를 증명하는데 사용되기 때문이다. (LFM, p.38)

이 모든 언명은 "우리의 탐구의 준거축"을 "우리의 실제적 요구라는 정점"(PI, 108)을 중심으로 바꾸어 놓으려는 시도, 즉 논리학을 새로운 각도에서 이해하려는 시도의 일환이다. 논리학이 명제의 최종적 분석을 제공하는 동시에 실재를 반영하는 단 하나의 선험적 틀이라는 트락타투스의 견해는 비트겐슈타인 스스로에 의해 논리학에 대한 신화에 불과한 것으로 부정된다. 그의 후기 저작에서 논리학은 생활의 문맥과 얽혀 있는 언어 게임의 문법으로 대체되며 언어 게임이 규칙을 따르는 인간 행위라는 사실이 강조된다. 그러나 트락타투스의 논리학이 전면 부정되는 것은 아니다. 그것은 제한된 영역에서는 의미 있는 역할을 할 수 있는 도구이지만 인간의 다양한 언어 행위를 모두 설명하기엔 너무 조야한 것으로 한계가 드러났다고 보는 편이 더 타당할 것이다.

5. 맺는 말

논리학의 본성에 대한 비트겐슈타인의 변화된 태도는 그의 수학관에도 그대로 반영되어 있다. 그에 의하면 수학의 근거는 메타 수학이나 논리학, 혹은 수리 철학에 있는 것이 아니라 측량, 추산, 수의 익힘, 계산에 있어서의 맞음, 등등 수학에 밀접히 연관된 일상

행위에 있다. 이러한 행위의 양식이 다를 경우 어떠한 메타 수학적 토대도 이를 해결할 수 없다고 본다. 수학은 여전히 경험 과학과 구분되어야 하지만 우리가 생활 속에서 수학에서 배운 대로 계산하고, 측량하고, 추론하는 과정에서 자연히 일상의 문맥에 접목되게 된다. 이러한 관점에서 보았을 때 수학의 언어는 일상 언어의 연장선 상에 있다. 양자는 서로 대립할 필요가 없는 것이다. 그러나 수학자들의 전문성과 그들이 사용하는 전문용어 때문에 우리는 그들의 말을 신비로운 것으로 받아들이게 된다. 비트겐슈타인은 우리가 특히 모순의 문제에 대해 이러한 과오를 저질렀다고 본다. 앞서 살펴보았듯이 대다수의 수학자들은 수학의 체계에 모순이 숨어 있으면 그 체계는 모순이 발견되든 아니든 이미 불치병에 걸린 가망 없는 체계이므로 폐기 처리해야 한다고 생각한다. 비트겐슈타인은 수학자들의 이러한 견해를 반드시 받아들여야 할 필요가 없다고 본다.

오랜 역사를 지닌 게임에서 어느 날 그 게임의 어떤 규칙들이 상호 모순된다는 사실이 발견되었다고 하자. 이러한 상황은 비록 드물게나마 실제로 일어난다. 우리는 이러한 상황이 지금까지의 이 게임의 역사를 모두 무효화한다고 보지 않는다. 우리는 게임의 규칙을 고쳐서 게임을 계속 진행한다. 비트겐슈타인은 이처럼 모순의 발견과 그 해소의 작업이 과거와 현재의 게임을 다치지 않고 그대로 보존한다는 사실이 모순에 대한 수학자들의 전통적 견해를 재고할 계기를 마련한다고 본다(LFM, pp.210, 221-222).

일상생활에서 우리의 다양한 견해를 모두 모아 그들 사이의 연관 관계를 분석해 보면 모순이 발견될는지 모른다. 그러나 그렇다고 모순이 곧 파국을 초래하지는 않는다. 모순된 견해들이라도 그것을 적재적소에 구사할 줄만 알면 우리는 아무 문제에도 봉착하지 않고 생활을 합리적이고 일관되게 끌어갈 수 있는 것이다. 모순의 체험과 모순된 견해가 우리의 삶을 항상 황폐하게 하지만은 않는다는 사실, 오히려 그것이 때로 우리의 생각을 자극하고 그 폭을 넓힌다는 사실의 의미를 우리는 다시 한번 생각해 보아야 할 것이다.

참고 문헌

이승종(1991) "Wittgenstein's Attitude Toward Contradiction," 박사 학위 논문. State University of New York at Buffalo.

Anderson, A.(1958) "Mathematics and the "Language Game,"" Benacerraf and Putnam 1964에 재수록.

Bell, D.(1979) *Frege's Theory of Judgment*. Oxford: Clarendon Press.

Benacerraf, P. and H. Putnam (eds.) (1964) *Philosophy of Mathematics*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Bernays, P.(1960) "Comments on Ludwig Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*," Benacerraf and Putnam 1964에 재수록.

Chihara, C.(1977) "Wittgenstein's Analysis of the Paradoxes in his *Lectures on the Foundations of Mathematics*," Shanker 1986에 재수록.

Church, A.(1948) "Review of Max Black's "A Translation of Frege's *Über Sinn und Bedeutung*,"" *Journal of Symbolic Logic*, vol. 13.

Frege, G.(1893) *The Basic Laws of Arithmetic*. Trans. and ed. M. Furth. Berkeley: University of California Press, 1964.

______. (1912) "Notes to P. E. B. Jourdain on "The Development of the Theories of Mathematical Logic and the Principles of Mathematics,"" *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. xliii.

______. (1918) "The Thought: A Logical Inquiry," trans. A. Quinton. P. F. Strawson (ed.), *Philosophical Logic*. Oxford: Oxford University Press, 1967에 재수록.

Gödel, K.(1931) "On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related System I," trans. J. van Heijenoort. J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*.

Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967에 재수록.

Hilbert, D.(1925) "On the Infinite," Benacerraf and Putnam 1964에 재수록.

Kreisel, G.(1958) "Wittgenstein's *Remarks on the Foundations of Mathematics*," *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 9.

Osherson, D. N., and E. Markman (1975) "Language and the Ability to Evaluate Contradictions and Tautologies," *Cognition*, vol. 3.

Shanker, S. (ed.) (1986) *Ludwig Wittgenstein: Critical Assessments vol. III*. London: Croom Helm.

von Neumann, J.(1931) "The Formalist Foundations of Mathematics," Benacerraf and Putnam 1964에 재수록.

Wittgenstein, L.(NB) *Notebooks 1914-1916*. Ed. G. H. von Wright and G. E. M. Anscombe, trans. G. E. M. Anscombe. Oxford: Basil Blackwell, 1961.

______. (TLP) *Tractatus Logico-Philosophicus*. Trans. D. Pears and B. McGuinness. London: Routledge & Kegan Paul, 1961.

______. (WVC) *Wittgenstein and the Vienna Circle: Conversations Recorded by Friedrich Waismann*. Ed. B. McGuinness, trans. J. Schulte and B. McGuinness. Oxford: Basil Blackwell, 1979.

______. (L) "Wittgenstein's Lectures in 1930-33," G. E. Moore, *Philosophical Papers*. London: George Allen & Unwin, 1959에 수록.

______. (PG) *Philosophical Grammars*. Ed. R. Rhees, trans. A. Kenny. Oxford: Basil Blackwell, 1974.

______. (RFM) *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Ed. G. H. von Wright, R. Rhees, and G. E. M. Anscombe, trans. G. E. M. Anscombe, revised ed. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1978.

______. (LFM) *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of*

Mathematics, Cambridge 1939. From the Notes of R. G. Bosanquet, Norman Malcolm, Rush Rhees, and Yorick Smythies. Ed. C. Diamond. Ithaca: Cornell University Press, 1976.

______. (PI) *Philosophical Investigations.* Ed. G. E. M. Anscombe and R. Rhees, trans. G. E. M. Anscombe, 2nd ed. Oxford: Basil Blackwell.

______. (Z) *Zettel.* Ed. G. E. M. Anscombe and G. H. von Wright, trans. G. E. M. Anscombe. Oxford: Basil Blackwell.

______. (MS) *Unpublished Manuscripts.* G. H. von Wright, *Wittgenstein.* Oxford: Basil Blackwell, 1982에서 부여된 번호에 준하여 인용.

Wright, C.(1980) *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Wrigley, M.(1980) "Wittgenstein on Inconsistency," Shanker 1986에 재수록.